

LAPLACE:

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

def. frequentista:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$$

Axiomas:

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ Acont. Disjuntos
4. $P(\emptyset) = 0$
5. $A \subseteq B$ então $P(A) \leq P(B)$
6. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
7. $P(A) \in [0, 1]$
8. $P(A - B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
9. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$A \cap \bar{B} \subseteq \bar{B}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Incompatíveis: $P(A \cap B) = 0$

Independentes: $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

Probabilidade Condicional:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{se } P(B) > 0$$

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$$

$$P(A - C | B) = P(A|B) - P(A \cap C | B)$$

$$P(A \cup C | B) = P(A|B) + P(C|B) - P(A \cap C | B)$$

Independência: $P(A|B) = P(A)$, A e B são independentes

$$P(A) = P(A|E_1)P(E_1) + \dots + P(A|E_n)P(E_n)$$

Nota: A e B são acontecimentos independentes se e só se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ e } \bar{B} \\ \bar{A} \text{ e } B \\ \bar{A} \text{ e } \bar{B} \end{array} \right\} \text{ são independentes}$$

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

$$\{a \in \mathbb{R} : P(X=a) > 0\}$$

Se X é v.a.d. tem obrigatoriamente uma função de probabilidade.

Função de probabilidade

- conjunto dos valores observáveis para a v.a. X
- conjunto das probabilidades associadas aos valores observáveis para a v.a. X .

Função de distribuição

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$= P(X \in]-\infty, x])$$

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

$$2. F \text{ é contínua à direita, i.e., } \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(a)$$

$$3. F \text{ é não decrescente, i.e., se } x < y, \text{ então } F(x) \leq F(y)$$

$$P(X=x) = P(X \leq x) - P(X < x) = F(x) - \underbrace{F(x^-)}_{\text{"}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{t \rightarrow x^-} F(t) = P(X \leq x^-)$$

Quando uma função de distribuição é uma função em escada, ela corresponde a uma v.a.d. Os valores observáveis dessa v.a. correspondem aos pontos em que a f.d. sofre um salto.

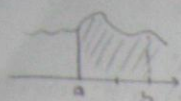
A probabilidade associada a um valor observável corresponde à altura do salto da f.d. nesse valor.

$$P(X=x) = 1 - F(x^-)$$

Massa, função variáveis aleatórias contínuas

(2)

$$P(X=a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$



DENSIDADE

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(u) du = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$$

$$1 = P(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u) du$$

$$\bullet p(u) \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \int_{\mathbb{R}} p(u) du = 1$$

Função densidade da probabilidade

$$1. p(u) \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} p(u) du = 1$$

MEDIANA

$$me: P(X \leq me) = \frac{1}{2}$$

$$me: F_X(me) = \frac{1}{2}$$

Quantil de ordem 0.95

$$X_{0.95} = P(X \leq X_{0.95}) = 0.95$$

$$X_{0.95} = F_X(X_{0.95}) = 0.95$$

MOMENTOS

Valores médio:

$$\mu = E(X) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X=x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x P(x) dx \end{cases}$$

se x é uma v.a. discreta

se x é uma v.a. contínua

$$E(g(x)) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) P(X=x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) P(x) dx \end{cases}$$

PROPRIEDADES:

$$E(b) = b$$

$$E(ax+b) = aE(x) + b$$

$$E(x+y) = E(x) + E(y)$$

Variação

$$V(X) = E((X - \mu)^2)$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$\sigma(X)$ → desvio padrão de X

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

PROPRIEDADES:

$$V(b) = 0$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2\text{cov}(X, Y)$$

VECTORES ALEATÓRIOS

$X \setminus Y$	y_1	y_2	...	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}		
x_2				
$\vdots$				
x_m				p_{m0}
	p_{01}		p_{0m}	1

INDEPENDÊNCIA

$$P_{ij} = P_i \cdot P_j$$

função probabilidade condicional:

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

Independência:

$$P_{ij} = P_i \cdot P_j \quad \forall i, j$$

Função densidade probabilidade conjunta:

$$1. f_{X,Y}(x,y) \geq 0$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1$$

condicional:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$E(x) = \sum_{i=1}^4 x P(x=u) = 2,25$$

$$E(y) = \sum_{j=1}^3 y P(y=y) = 1,94$$

		1,94			(3)
	$x \backslash y$	1	2	3	
	1	A		B	
2,25	2				
	3	C		D	
	4				

Covariância

$$\text{cov}(x,y) = E[(x-E(x))(y-E(y))]$$

No valor da cov só devem ser feitos ajustes acerca do seu sinal.

Se for negativo poderá existir uma tendência de crescimento oposto entre as variáveis.

Se for positivo poderá existir uma tendência de crescimento igual entre as variáveis.

Coefficiente de correlação $\rho(x,y)$

$$\rho(x,y) = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sqrt{v(x)v(y)}}$$

$$\bullet | \rho(x,y) | < 1$$

$$\bullet | \rho(x,y) | \geq 0,7$$

Simplificação:

$$\text{cov}(x,y) = E(xy) - E(x)E(y)$$

se x e y são v.a. independentes

$$\text{cov}(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow E(xy) = E(x)E(y)$$

Coefficiente de variação

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \times 100\%$$

Distribuições Discretas

Distribuição Discreta

Função de Probabilidade:

$$P(X=x) = \frac{1}{n}, \quad x=1, \dots, n$$

Função de Distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{k}{n} & k \leq x < k+1, \quad k=1, \dots, n-1 \\ 1 & x \geq n \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Distribuição Hipergeométrica

Exemplo:

65	3 - saudável
45	3 - doente

D.S.

D.S.

Selecionar uma amostra aleatória de 3 pessoas

X: n.º de pessoas saudáveis na amostra de 3 pessoas

$$P(X=1) = \frac{{}^3C_1 \cdot {}^6C_2}{{}^9C_3} = \frac{3}{14}$$

$$P(X=0) = \frac{{}^3C_0 \cdot {}^6C_3}{{}^9C_3}$$

$$X = \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \end{cases}$$

X tem dist. Hipergeométrica

$$X \sim H(9, 5, 3)$$

$$H(N, M, n)$$

$$E(X) = n \frac{M}{N}$$

$$V(X) = n \frac{M}{N} \frac{(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

N: total ; M: n.º de saudáveis
n: tamanho amostra

→ População com número N finito de elementos

→ Selecionar uma amostra ao acaso e sem reposição n elem.

→ Definir uma v. X de contagem de sucessos na amostra

→ Ter conhecimento de n.º M de sucessos na população

$$P(X=x) = \frac{{}^M C_x {}^{(N-M)} C_{(n-x)}}{{}^N C_n}$$

Distribuição Binomial

$$P(X=x) = {}^n C_x p^x (1-p)^{n-x} \quad x=0,1,\dots,n \quad 0 < p < 1$$

X tem distribuição Binomial de parâmetros (n, p)

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

→ Se for selecionada 1 amostra de n elementos com reposição, numa população com 1n finito de elementos

↓
tam. amostra
↓
prob. de 1 suco.
em cada extração

→ Se for selecionada 1 amostra de n elementos numa pop. infinita.

→ v.a. X possui a contagem do n de sucessos na amostra

→ tem conhecimentos prévios da prob. de sucesso em cada extração.

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1-p)$$

Distribuição de Bernoulli

Experiência aleatória com 2 possíveis resultados.

$$X \sim \text{Ber}(p)$$

$$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

$$E(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = p - p^2 = p(1-p)$$

Distribuição de Poisson

$$P(X=x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

λ - taxa média de ocorrência num intervalo de amplitude 1.

$$X \sim P(\lambda)$$

$X(t)$ n.º de processos num período de tempo t

$$X(t) \sim P(\lambda t)$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

Distribuição Geométrica

$$P(X=k) = p(1-p)^{k-1} \quad k=1,2,\dots \quad 0 < p < 1$$

Proposição:

v.a. $X \sim \text{Geo}(p)$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - (1-p)^x$$

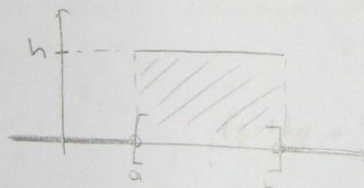
Distribuições contínuas

Distribuição Uniforme contínua

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$



Área = 1

Densidade

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx$$

Distribuição Exponencial

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-(x-\lambda)/\theta} \\ 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \lambda \\ x \leq \lambda \end{cases}$$

Proposição:

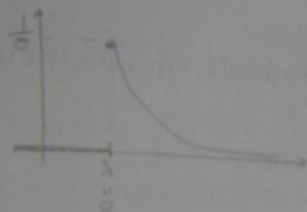
$$x \sim \text{Exp}(\lambda, \theta)$$

$$p(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x-\lambda)/\theta} \\ 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \lambda \\ x < \lambda \end{cases}$$

$$E(x) = \lambda + \theta$$

$$V(x) = \theta^2$$



Seja $N(t)$ - n. de sucessos observados em t unid. de tempo

$$N(t) \sim \text{P}(\lambda t)$$

x: intervalo de tempo entre sucessos sucessos

$$x \sim \text{Exp}\left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$$

Distribuição Normal

$$x \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$z \sim N(0, 1)$$

padrão

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

$$E(x) = \mu$$

$$V(x) = \sigma^2$$

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

TEOREMAS

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variáveis aleatórias independentes com distribuições $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i=1, 2, \dots, n$.

Considerando as constantes reais $a_1, a_2, \dots, a_n$ com algum $a_i \neq 0$ temos que:

$$Y = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n \sim N(a_1 \mu_1 + \dots + a_n \mu_n, a_1^2 \sigma_1^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2)$$

—— " ——

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e a, b são constantes reais com $a \neq 0$, então v.a. $Y = aX + b$ tem distribuição $N(a\mu + b, a^2 \sigma^2)$

NOTA:

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$$

$$\text{cov}(X, X) = V(X)$$

$$\text{cov}(a + bX, c + dY) = bd \text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{cov}(aX + bY, cZ + dW) = ac \text{Cov}(X, Z) + ad \text{Cov}(X, W) + bc \text{Cov}(Y, Z) + bd \text{Cov}(Y, W)$$